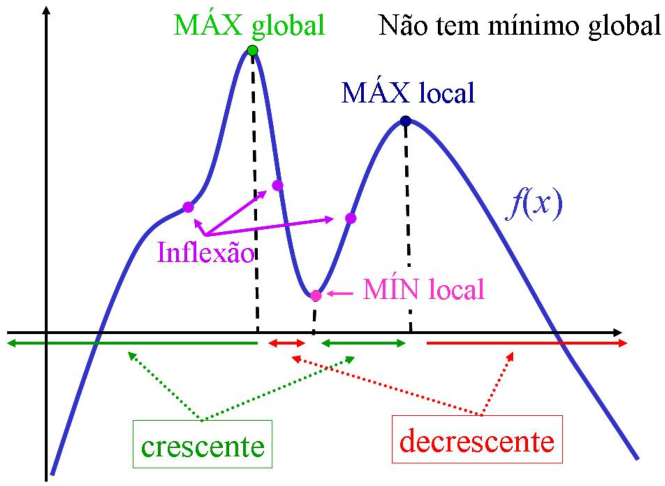


OBS: Já foi visto que $f' \left\langle \begin{array}{l} + \text{ crescente} \\ - \text{ decrescente} \end{array} \right.$ e $f'' \left\langle \begin{array}{l} + \text{ concavidade } \cup \\ - \text{ concavidade } \cap \end{array} \right.$

Definições 1 *Se $p \in Dom(f)$ e se $f'(p) = 0$ ou se $f'(p)$ não existir, então p é chamado **ponto crítico** de f. O ponto $(p, f(p))$ também é chamado ponto crítico. O **valor crítico** de f é $f(p)$.*

TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Seja p um ponto crítico de uma função f, no qual $f'(p) = 0$.
Se $f''(p)$ existe e se

· $f''(p) < 0$ então f tem um máximo local em p;
· $f''(p) > 0$ então f tem um mínimo local em p;
· $f''(p) = 0$ então nada se conclui.

$f' = 0$ e $f'' \left\langle \begin{array}{l} + \text{ mínimo} \\ - \text{ máximo} \end{array} \right.$

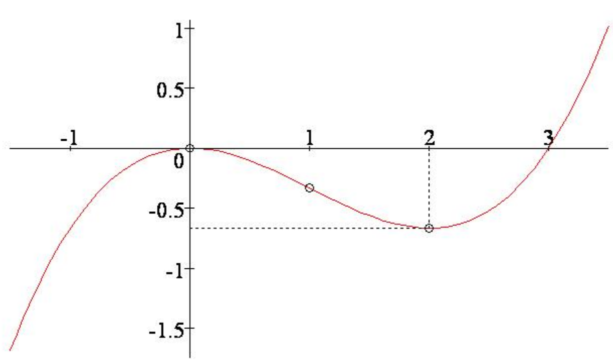
Exemplo 1 $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2}$

· $f(x) = \dfrac{1}{6}x^2(x-3) \implies f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $x = 3$ (raízes)

· $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - x = \dfrac{1}{2}x(x-2) \implies f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $x = 2$ (pontos críticos)

· $f''(x) = x - 1 \implies f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (inflexão)

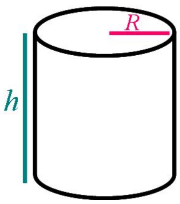
Pelo Teste da Derivada Segunda, $\begin{cases} f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é máximo local e } f(0) = 0 \text{ (valor máximo)} \\ f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ é mínimo local e } f(2) \cong -0,67 \text{ (valor mínimo)} \end{cases}$



OTIMIZAÇÃO (PLT - Pág. 153)

Exemplo 2 *Se uma lata fechada com volume $16\pi\ cm^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.*

Sejam $V =$ volume da lata e $S =$ superfície da lata.



$$\begin{cases} V = \pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \dfrac{16}{R^2} \\ S = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi \left(R^2 + Rh\right) \end{cases} \Rightarrow S(R) = 2\pi\left(R^2 + R\frac{16}{R^2}\right) = 2\pi\left(R^2 + \frac{16}{R}\right)$$

$$S\prime(R) = 2\pi\left(2R - \frac{16}{R^2}\right) = 4\pi\left(R - \frac{8}{R^2}\right) = 0 \Leftrightarrow R^3 = 8 \Rightarrow \boxed{R = 2 \text{ cm}}$$

$$S\prime\prime(R) = 4\pi\left(1 + \frac{16}{R^3}\right) > 0, \text{ se } R > 0 \Rightarrow S(2) \text{ é mínimo}$$

$$\text{Se } R = 2,\ h = \frac{16}{R^2} = \frac{16}{4} \Rightarrow \boxed{h = 4 \text{ cm}}$$

Exemplo 3 *Em uma fábrica de ventiladores, a função demanda é $p = -2q + 800$, onde p é o preço unitário e q é a quantidade produzida e comercializada. Suponha que o custo para a produção dos ventiladores seja dado por $C(q) = 200q + 25000$. Obtenha a quantidade que dá o lucro máximo e o lucro máximo.*

OBS: A função lucro é dado por: $L(q) = \underbrace{R(q)}_{RECEITA} - C(q)$, *onde* $R(q) = pq$.

Receita. $R(q) = pq = (-2q + 800)\,q \Rightarrow R(q) = -2q^2 + 800q$

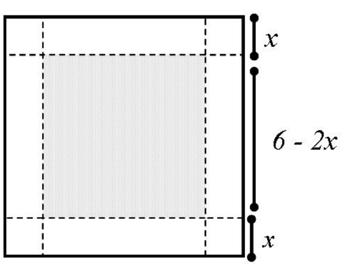
Lucro. $L(q) = R(q) - C(q) = -2q^2 + 800q - (200q + 25000) \Rightarrow \boxed{L(q) = -2q^2 + 600q - 25000}$

$$\boxed{L'(q) = -4q + 600} \text{ (Lucro Marginal)} \Longrightarrow \begin{cases} L'(q) = -4q + 600 = 0 \Rightarrow q = 150 \\ L\prime\prime(q) = -4 \Rightarrow L\prime\prime(150) < 0 \text{ (150 é máximo)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{q = 150}$$

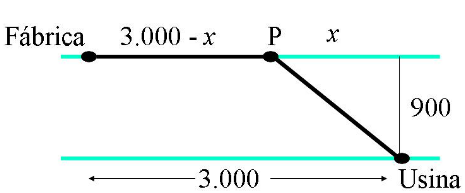
$$L_{MÁX} = L(150) = -2(150)^2 + 600 \times 150 - 25000 = 20000 \Rightarrow \boxed{L_{MÁX} = 20.000}$$

Exercício 1 *(PLT - Pág. 157) O momento de torção de uma viga, apoiada em uma extremidade, a uma distância x do suporte é dado por $M(x) = \frac{1}{2}wLx - \frac{1}{2}wx^2$ onde L é o comprimento da viga e w é a carga uniforme por unidade de comprimento. Encontre o ponto da viga onde o momento é o maior possível.*

Exercício 2 *Deseja-se construir uma caixa aberta (sem tampa) de papelão com pedaços quadrados de 6 dm (60 cm) de lado, retirando-se um quadrado de cada canto da cartolina e dobrando-se perpendicular os lados resultantes. Calcule a altura x da caixa para que ela tenha o maior volume possível. De quanto é este volume? (Desprezar a espessura da cartolina.)*



Exercício 3 *Um cabo de eletricidade ligará uma usina hidrelétrica situada à margem de um rio de 900 metros de largura a uma fábrica situada na outra margem do rio, 3.000 metros abaixo da usina. O custo de instalação o cabo através do rio é de \$ 500/metro, enquanto que, em terra, custa \$ 400/metro. Qual é a forma mais econômica de se instalar o cabo?*

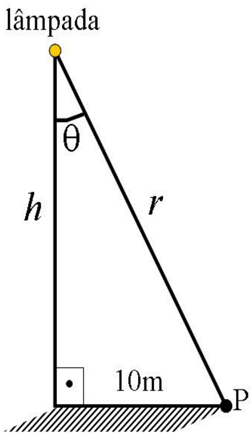


Exercício 4 *(PLT - Pág. 158) Quando uma corrente elétrica passa por dois resistores de resistência* r_1 *e* r_2*, ligados em paralelo, a resistência combinada* R *pode ser calculada por* $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$*, onde* R*,* r_1 *e* r_2 *são positivos. Suponha que* r_2 *é constante.*

a) Mostre que R *é uma função crescente de* r_1*.*

b) Onde R *atinge seu valor máximo no intervalo* $a \leq r_1 \leq b$*?*

Exercício 5 *(PLT - Pág. 169 - Problema 11) Uma lâmpada está suspensa a uma altura* h *acima do chão. A iluminação no ponto* P *é inversamente proporcional ao quadrado da distância de* P *à lâmpada e diretamente proporcional ao co-seno do ângulo* θ*. A que altura do chão deve estar a lâmpada para que a iluminação seja máxima no ponto* P*?*



CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

Exemplo 4 $f(x) = x^4 + 4x$ *OBS: Este exemplo mostra que* $f''(p) = 0$ *não garante que* p *é de inflexão.*

$f(x) = x\left(x^3 + 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\sqrt[3]{4} \cong -1,6$ (raízes)

$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4\left(x^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (ponto crítico)

$f''(x) = 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$		$-$	$+$	$\searrow \cup$
$x = -1$	-3	0	$+$	$(-1, -3)$ MíN $\cup$
$-1 < x < 0$		$+$	$+$	$\nearrow \cup$
$x = 0$	0	$+$	0	$\nearrow \cup$
$x > 0$		$+$	$+$	$\nearrow \cup$