AULA 04 - LOGARITMO

Definição 1 *Sejam* $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$. *Então* $\boxed{\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x.}$

Nomenclatura: $\begin{cases} a\text{: logaritmando (ou antilogaritmo)} \\ b\text{: base do logaritmo} \\ x\text{: logaritmo} \end{cases}$ **Convenções**: $\begin{cases} \log a = \log_{10} a \text{ - logaritmo decimal} \\ \ln a = \log_e a \text{ - logaritmo natural} \\ \qquad\qquad (\text{e} = 2{,}718...) \end{cases}$

Exemplos: $\begin{cases} \log_2 8 = 3, \text{ pois } 2^3 = 8 & \log_2 8 = 3, \text{ pois } 2^3 = 8 \\ \log_b 1 = 0, \text{ pois } b^0 = 1 & \log_5 \sqrt{5} = 1/2 \text{ pois } 5^{1/2} = 5 \\ \log_5 \sqrt{5} = 1/2 \text{ pois } 5^{1/2} = 5 & \\ \log_{10} 100 = 2 \text{ pois } 10^2 = 100 & \log_b b = 1, \text{ pois } b^1 = b \\ \ln e = \log_e e = 1 & \log_b b^k = k, \text{ pois } b^k = b^k \end{cases}$

Propriedades dos logaritmos

1) $\boxed{\log_b (A.B) = \log_b A + \log_b B}$

2) $\boxed{\log_b \dfrac{A}{B} = \log_b A - \log_b B}$ **Cuidado**! $\dfrac{\log A}{\log B} \neq \log A - \log B$

3) $\boxed{\log_b A^p = p \cdot \log_b A}$

4) Mudança de base: $\boxed{\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}}$

5) $b^{\log_b x} = x$, pois se $\log_b x = y \Rightarrow^{def} b^y = x$. Então $b^{\log_b x} = b^y = x$.

Exercício 1 *Calcule os seguintes logaritmos:*

a) $\log_2 32 =$

b) $\log_{1/2} 8 =$

c) $\log 0,01 = x$

d) $co\log_5 25 =$

Obs: Por definição, $co\log_b a = -\log_b a$ (co-logaritmo)

Exercício 2 *Para quais valores de* x *existe* $\log_x (5 - x)$*?*

Exercício 3 *Reduza a um único logaritmo:*

a) $\log_2 \dfrac{7}{4} + \log_2 \dfrac{5}{7} + \log_2 \dfrac{4}{9} =$

b) $\log_5 17 - \log_5 2 =$ *c)* $2\log_3 5 + \log_3 2 =$

Exercício 4 *Sem utilizar a calculadora e supondo* $\log 2 \cong 0,30$ *e* $\log 3 \cong 0,47$*, obtenha:*

a) $\log 6 =$

b) $\log 8 =$

c) $\log 5 =$

Obs: $\log 10 = 1$.

d) $\log \sqrt{45} =$

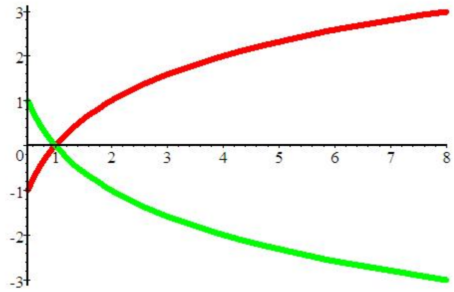
FUNÇÕES LOGARíTMICAS

Seja $b > 0$, $b \neq 1$. A função logarítmica de base b é a função $f : R_+^* \to R$ definida por $f(x) = \log_b x$.

O gráfico da função logarítmica passa por $(1, 0)$ porque $\log_b 1 = 0$. A função $g(x) = \log_b x$ é $\begin{cases} \text{crescente, se } b > 1 \\ \text{decrescente, se } 0 < b < 1. \end{cases}$

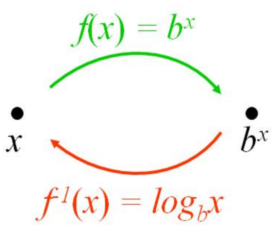
Exemplo 1 $f(x) = \log_2 x$

x	$f(x)$
$1/2$	$\log_2 1/2 = \log_2 (2^{-1}) = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
8	$\log_2 8 = 3$



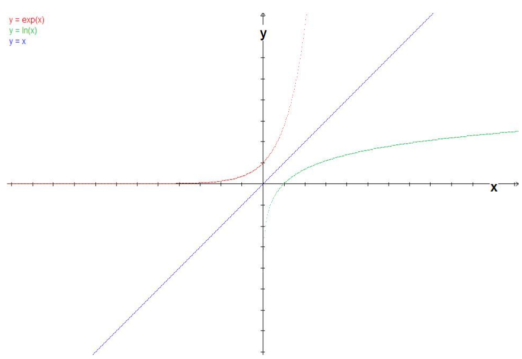
Em verde, a função $\log_{1/2} x$

A função logarítmica de base b é a função inversa da função exponencial b^x.



$$\exp : R \to R_+^* \qquad \log_b : R_+^* \to R$$
$$x \vdash b^x \qquad b^x \vdash x$$

A função exponencial e^x e $\ln x$ são inversas uma da outra. Logo, o gráfico destas funções são simétricos em relação à reta $y = x$.



Vermelho: e^x Verde: $\ln x$ Azul: $y = x$

Equações exponenciais - Exemplos

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

$$2^x = 7 \Rightarrow \log 2^x = \log 7 \Rightarrow x \log 2 = \log 7 \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 2} \cong 2.81$$

$$\text{OU } \ln 2^x = \ln 7 \Rightarrow x \ln 2 = \ln 7 \Rightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 2} \cong 2.81$$

Exercício 5 *(PLT 23) Resolva usando logaritmos.*

a) $3^x = 11$

b) $10 = 4^x$

c) $25 = 2(5)^x$

d) $2e^{3x} = 4e^{5x}$

e) $10^{x+3} = 5e^{7-x}$

f) $9^x = 2e^{x^2}$

g) $2x - 1 = e^{\ln x^2}$

Exercício 6 *Voltando ao exercício do aeroporto, o comprimento da pista necessário para decolagem daquele avião particular é dado pela função exponencial* $C(h) = 670\,(1,1)^{h/1000}$*, onde* h *é a altitude do local do aeroporto. O projeto de 1.000 ft de pista é adequado para qual altitude?*

Exercício 7 *(PLT 24) O ar em uma fábrica está sendo filtrado de modo que a quantidade* P *de determinado poluente (em mg/l) está diminuindo de acordo com a função* $P = P_0 e^{-kt}$*, onde* t *é o tempo em horas. Se 10% da poluição são removidos nas cinco primeiras horas:*

a) Qual o percentual de poluição que permanece após 10 horas?

b) Quanto tempo vai levar para que a poluição seja reduzida de 50%?

c) Faça um gráfico da poluição em função do tempo. Mostre os resultados de seus cálculos no gráfico.

d) Explique por que a quantidade de poluentes pode diminuir dessa forma.

Exercício 8 *(PLT 24) A pressão atmosférica* P *decai exponencialmente com a altura* h*, em metros, acima da superfície da Terra:* $P = P_0 e^{-0,00012h}$*, onde* P_0 *é a pressão atmosférica no nível do mar.*

a) No topo da montanha McKinley, com 6198 metros de altura, qual é a pressão atmosférica, como percentual da pressão no nível do mar?

b) A altitude máxima de voo de um avião comercial comum é em torno de 12.000 metros. A essa altitude, qual é a pressão atmosférica, em percentual da pressão no nível do mar?